**Bareme de corectare – clasa a-V-a**

**I. a)** $x = 3y + 19$, $19 < y$

$2x – 6y + 3 = 2(3y + 19) – 6y + 3 = 41$

**b)** $x + y = 4y + 19$; $y > 19$, deci $x + y > 4 \cdot 19 + 19 = 76 + 19 = 95$

**c)** $x - y < 61 \Rightarrow 2y + 19 < 61 \Rightarrow y < 21$. Dar $y > 19$, deci $y = 20$, de unde $x = 70$.

**II.** $x = 1001(a+d) + 110(b+c)$

$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ; $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$

**a)** Deci $11 \mid x \quad \forall \overline{abcd}$

**b)** i) $7 \mid 1001$ si 7 nu divide 110, deci pentru ca 7 sa dividă pe x trebuie ca $7 \mid (b+c)$ unde b, c cifre în baza 10 $\Rightarrow$

$(b,c) \in \{(0,0),(0,7),(7,0),(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4).(4,3),(5,9),(9,5),(6,8),(8,6),(7,7)\}$, nu se consideră permutările la perechi de cifre, x dând aceeasi valoare $\Rightarrow$ 14 posibilități, iar pentru fiecare, a si d poate fi orice cifră nenula adică sunt $9 \cdot 9 = 81$ perechi. Deci sunt $14 \cdot 81 = 1134$

ii) $13 \mid 1001$ si 13 nu divide 110 deci pentru ca 13 să dividă pe x trebuie ca $13 \mid (b+c)$, unde b, c cifre in baza 10 $\Rightarrow$

$(b,c) \in \{(0,0),(4,9),(9,4),(5,8).(8,5),(6,7),(7,6)\}$ $\Rightarrow$ 7 posibilități., iar pentru fiecare, a şi d poate fi orice cifră nenulă, adică sunt $9 \cdot 9 = 81$ de perechi.

Deci $7 \cdot 81 = 567$

**c)** $(7 ; 13) = 1$, deci b + c trebuie sa fie divizibil cu $7 \cdot 13 = 91$ imposibil, pentru că b şi c sunt cifre. Se obține b = c = 0 şi 81 variante pentru a şi d deoarece 1001 este divizibil cu 91.

**III. 1)** $x = 400$

**2)** Suma minimă se obține pentru $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, deci 2007 factori sunt egali cu 1, un factor este egal cu 2 şi doi factori sunt egali cu 3. Suma acestor 2010 numere este

$$2007 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 3 = 2015.$$

**IV. 1)** $n = 2010 \cdot C + R$, $R \le 2009$

Cel mai mare număr se obține pentru C = 2008 şi R = 2009, deci este egal cu 4038089

**2)** $3(y + 41) = x – 41$ şi $x > 3y$

Dacă $x = 4y$ se îndeplineşte condiția cerută: $3y + 3 \cdot 41 = 4y - 41 \Rightarrow y = 164, x = 656$

## Bareme de corectare – clasa a-VI-a

**I. 1)**

a) $a = 3^{2010} \cdot (3+1) = 3^{2010} \cdot 2^2$

$b = 3^{2008} \cdot 4 + 2 = 2\left(2 \cdot 3^{2008} + 1\right)$

$c = 3^{2007} \cdot 2 + 1$

$(a;b) = 2$ ; $[a;b] = 3^{2010} \cdot 2^2\left(3^{2007} \cdot 2 + 1\right)$

b) $\frac{b}{c} = \frac{2\left(2 \cdot 3^{2008} + 1\right)}{2 \cdot 3^{2007} + 1}$

$\frac{2 \cdot 3^{2008} + 1}{2 \cdot 3^{2007} + 1} > 1 \Rightarrow \frac{b}{c} > 2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow b > 2c$

**2)**

$$A = \frac{201}{2} + \frac{601}{6} + \frac{1201}{12} + \frac{2001}{20} + ... + \frac{9001}{90} =$$

$$= \left(100 + \frac{1}{2}\right) + \left(100 + \frac{1}{6}\right) + \left(100 + \frac{1}{12}\right) + \left(100 + \frac{1}{20}\right) + ... + \left(100 + \frac{1}{90}\right) =$$

$$= 100 \cdot 9 + \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{9 \cdot 10}\right) = 900 + \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 900 + \frac{9}{10} = \frac{9009}{10} < 1000$$

**II.** Observăm că a, b sunt cifre. Relația devine

$$\frac{\overline{a,(b)} + \overline{b,(a)}}{a+b} = \frac{a+b}{3a} \Leftrightarrow \frac{\frac{\overline{ab} - a}{9} + \frac{\overline{ba} - b}{9}}{a+b} = \frac{a+b}{3a} \Leftrightarrow \frac{\frac{10a + b - a + 10b + a - b}{9}}{a+b} = \frac{a+b}{3a} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{10(a+b)}{9}}{a+b} = \frac{a+b}{3a} \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{a+b}{3a} \Leftrightarrow 30a = 9a + 9b \Leftrightarrow 21a = 9b \Leftrightarrow 7a = 3b \Leftrightarrow a = 3, b = 7.$$

**III**. **a)** Notăm cu x lungimea segmentului [OA]

$\Rightarrow AB = OA = x$, $BC = x$, $CD = 2x$, $DE = 3x$, $EF = 5x$

Notăm cu M mijlocul segmentului CD $\Rightarrow CM = MD = \frac{CD}{2} = x$. Arătăm că $[OM] \equiv [ME]$.

$OM = OA + AB + BC + CM = x + x + x + x = 4x$; $ME = MD + DE = x + 3x = 4x$

Deci M este mijlocul segmentului [OE].

**b)** $\frac{AC}{BE} + \frac{BC}{CD} + \frac{AB}{AD} = \frac{2x}{6x} + \frac{x}{2x} + \frac{x}{4x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \geq \frac{11}{12} = \frac{BF}{AF}$

**IV. a)** 1° + 2° + … + 15° = 120°

$m(\sphericalangle A_1OA_4) = 6^\circ$

$m(\sphericalangle A_{13}OA_{16}) = m(\sphericalangle A_1OA_{16}) - m(\sphericalangle A_1OA_{13}) = 120 - 78 = 42^\circ$

**b)** $m(\sphericalangle A_4OA_{13}) = m(\sphericalangle A_1OA_{13}) - m(\sphericalangle A_1OA_4) = 78 - 6 = 72^\circ$

$m(\sphericalangle MON) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle A_1OA_4) + \frac{1}{2}m(\sphericalangle A_{13}OA_{16}) + m(\sphericalangle A_4OA_{13}) = 86^\circ$

## Bareme de corectare – clasa a-VII-a

**I. a)** $A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}+...+\frac{\sqrt{2010}}{\sqrt{2010}\cdot\sqrt{2009}}-\frac{\sqrt{2009}}{\sqrt{2010}\cdot\sqrt{2009}}=1-\frac{1}{\sqrt{2010}}\in(0,1)$

**b)** $\sqrt{2010}\cdot A=\sqrt{2010}-1\Rightarrow[A]=44-1=43$

**II. . a)**

$$\frac{a+2b}{2a+3b+4c}=\frac{b+2c}{2b+3c+4a}=\frac{c+2a}{2c+3a+4b}=\frac{a+2b+b+2c+c+2a}{2a+3b+4c+2b+3c+4a+2c+3a+4b}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{a+2b}{2a+3b+4c}+\frac{b+2c}{2b+3c+4a}+\frac{c+2a}{2c+3a+4b}}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=1\in N$$

**b)** Din $\frac{a+2b}{2a+3b+4c}=\frac{b+2c}{2b+3c+4a}=\frac{c+2a}{2c+3a+4b}=\frac{1}{3}\Rightarrow 2a+3b+4c=3(a+2b)$ si analoagele.

$$\frac{\sqrt{2ab}}{2a+3b+4c}=\frac{\sqrt{2ab}}{3(a+2b)}\le\frac{\frac{a+2b}{2}}{3(a+2b)}=\frac{1}{6}$$ si analoagele.

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2ab}}{2a+3b+4c}+\frac{\sqrt{2bc}}{2b+3c+4a}+\frac{\sqrt{2ca}}{2c+3a+4b}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2ab}}{3(a+2b)}+\frac{\sqrt{2bc}}{3(b+2c)}+\frac{\sqrt{2ca}}{3(c+2a)}}\le\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**III. a)** ABDE şi ATDF – paralelograme, deci DT || BF şi DE || BF. Cum prin D se poate duce o singură paralelă la BF rezultă că punctele T, D, E sunt coliniare.

**b)** BFET este paralelogram. Pentru a fi pătrat trebuie ca BE $\perp$ FT.
Din FT $\perp$ BE şi FT $\perp$ AD rezultă A, B, C sunt coliniare., ceea ce contravine cu ipoteza că ABC este triunghi, deci BFET nu poate fi pătrat.

**c)** Fie FD $\cap$ CE = {P}.
Deoarece FT este mediatoarea [AD], rezultă că $\Delta$AFD este isoscel cu $\prec FDA\equiv\prec FAD$.
De asemenea, $\Delta$ABC este isoscel cu [AB]$\equiv$[AC], deci $\prec B\equiv\prec C$
$\prec$FAD este exterior $\Delta$ABC deci m($\prec$FAD) = m($\prec$FDA) = 2m($\prec$ACB)
Deoarece FD $\perp$ BE, în $\Delta$PCD dreptunghic avem m($\prec$PDC)+m($\prec$PCD)=90°
m($\prec$PCD) = m($\prec$ACB) (opuse la vârf)
Se obține m($\prec$PDC)+m($\prec$PCD) = 3m($\prec$ACB) = 90°, de unde m($\prec$ACB)= 30°
În $\Delta$ABC: m($\prec$ACB) = m($\prec$ABC) = 30°, deci m($\prec$BAC) = 120°

**d)** Diagonalele patrulaterului ATDF se înjumătățesc şi sunt perpendiculare, deci ATFD este romb.

**IV**. a) Triunghiul ADC este isoscel cu AD = DC, deci m($\prec$DAC) = m($\prec$DCA)
Dar m($\prec$DCA) = m($\prec$CAB) (alterne interne)
Rezultă că m($\prec$DAC) = m($\prec$CAB), deci (AC este bisectoarea $\prec$A

**b)** În $\Delta$ABC se obține m($\prec$ACB) = 90°, de unde AB = 24 cm. ; $PQ=\frac{AB-DC}{2}=6$ cm

**c)** m($\prec$ADB) = m($\prec$ACB) = 90°; m($\prec$ADE0 = 30° de unde m($\prec$EDB) = 60°
În $\Delta$DEB dreptunghic, EQ este mediană corespunzătoare ipotenuzei; $EQ=\frac{DB}{2}=DQ$,
de unde se obține că $\Delta$DEQ este isoscel şi are un unghi cu măsura de 60°, deci este echilateral.

**d)** DP este mediană corespunzătoare bazei în $\Delta$ADC isoscel, deci DP $\perp$ AC
m($\prec$QEB) = 180° - 90° - 60° = 30°
$\prec$QEB şi $\prec$CAB sunt corespondente, deci AC || EQ, de unde DP $\perp$ EQ

**Bareme de corectare – clasa a-VIII-a**

**I. a)** $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{2}$ **;** Se notează $a=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$

Pres. $a\in Q$; $\sqrt{6}+\sqrt{3}=a+1+\sqrt{2}\Rightarrow(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=(a+1+\sqrt{2})^2\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{a^2+2a-6}{4-2a}\in Q$ fals

**b)**

$\left(\frac{\sqrt{26}+1}{5}\right)^2=b\Rightarrow\frac{\sqrt{26}-1}{5}=\frac{26-1}{5(\sqrt{26}+1)}=\frac{5}{\sqrt{26}+1}=\frac{1}{b}$; $b^{2010}+\frac{1}{b^{2010}}>2\Leftrightarrow(b^{2010}-1)^2>0$

**II. .** **a)** Se aplica $m_a\geq m_g$ pentru numerele 1 şi $\frac{a+b}{2}$.

**b)** din punctul a) avem $a\sqrt{\frac{b+c}{2}}\leq\frac{a\left(1+\frac{b+c}{2}\right)}{2}=\frac{a}{2}+\frac{a(b+c)}{4}$ şi analoagele.

Din ipoteză avem

$a+b+c=1\,|^2\Leftrightarrow(a+b+c)^2=1\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1\Rightarrow 2(ab+ac+bc)=1-(a^2+b^2+c^2)$

Relația devine

$a\sqrt{\frac{b+c}{2}}+b\sqrt{\frac{c+a}{2}}+c\sqrt{\frac{a+b}{2}}\leq\frac{a}{2}+\frac{a(b+c)}{4}+\frac{b}{2}+\frac{b(c+a)}{4}+\frac{c}{2}+\frac{c(a+b)}{4}=\frac{a+b+c}{2}+\frac{2(ab+ac+bc)}{4}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{4}=\frac{3}{4}-\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\leq\frac{3}{4}$

**III. a)** Fie $\{O\}=AC\cap BD$, deci $AC\perp BD$ ; $(PBD)\cap(ABC)=BD$

$AO\perp BD$, $AO\subset(ABC)$ (1)

$\Delta PAB\equiv\Delta PAD$ (C.C.), de unde PB = PD, deci $\Delta PBD$ este isoscel cu PO mediană corespunzătoare bazei, adică PO este înălțime în $\Delta PBD$

Rezultă $PO\perp BD$, $PO\subset(PBD)$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow m(\sphericalangle(PBD),(ABC))=m(\sphericalangle AOP)$. În $\Delta PAO$ $tg(\sphericalangle AOP)=\frac{AP}{AO}=\sqrt{3}\Rightarrow m(\sphericalangle AOP)=60^\circ$

**b)** Din a) $\Rightarrow BD\perp(AOP)$ (3)

Punctele A, O, C coliniare $\Rightarrow C\in(AOP)\Rightarrow PC\subset(AOP)\Rightarrow M\in(AOP)\Rightarrow AM\subset(AOP)$ (4)

Din (3) şi (4) $\Rightarrow BD\perp AM\Rightarrow m(\sphericalangle BD,AM)=90^\circ$

**c)** Din b) $\Rightarrow BD\perp(AOP)=(PAC)$; $MO\subset(PAC)\Rightarrow MO\perp BD$

$A_{MBD}=\frac{MO\cdot BD}{2}=MO$; Aria $\Delta MBD$ este minimă pentru MO minim, deci pentru $OM\perp PC$

$A_{POC}=\frac{OC\cdot PA}{2}=\frac{OM\cdot PC}{2}$; $PC=\sqrt{21}$ ( din teorema lui Pitagora în $\Delta PAC$)

$\Rightarrow OM=\frac{3\sqrt{7}}{7}\Rightarrow \min A_{MBD}=\frac{3\sqrt{7}}{7}cm^2$

**IV.** În planul triunghiului MCD avem

$\left.\begin{array}{l}\frac{CM}{XM}=\frac{3}{1}=\frac{CN}{ND}\overset{R.T.Thales}{\Rightarrow}XN\parallel MD\\ \frac{DZ}{AM}=\frac{1}{3}=\frac{DN}{NC}\overset{R.T.Thales}{\Rightarrow}NZ\parallel MC\end{array}\right\}\Rightarrow$ MXNZ este paralelogram, deci $XZ\cap MN=\{O\}$ şi O este mijlocul [MN].

În planul triunghiului NAB, se arată folosind linii mijlocii că MTNY este paralelogram, de unde $YT\cap MN=\{O\}$. Deci segmentele [XZ] şi [TY] sunt (XYZT este chiar paralelogram), deci punctele X, Y, Z, T sunt coplanare.